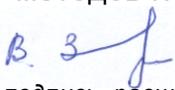


МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО ВГУ)

УТВЕРЖДАЮ  
Заведующий кафедрой  
алгебры и математических  
методов гидродинамики

 (Звягин В.Г.)  
подпись, расшифровка подписи  
19.06.2020 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**  
Б1.О.13 Современные методы геометрии и анализа

- 1. Шифр и наименование направления подготовки:**  
01.03.01 Математика
- 2. Профиль подготовки:** Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление
- 3. Квалификация выпускника:** Бакалавр
- 4. Форма образования:** Очная
- 5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:** Кафедра алгебры и математических моделей гидродинамики
- 6. Составители программы:** профессор, д.ф.-м.н. Звягин Виктор Григорьевич
- 7. Рекомендована:** НМС математического факультета протокол № 0500-04 от 18.06.2020 г.
- 8. Учебный год:** 2021-2022                      **Семестр(-ы):** 3

## 9. Цели и задачи учебной дисциплины:

Цели учебной дисциплины: освоение основных понятий и фактов алгебраической геометрии и нелинейного анализа, овладение основными методами решения задач.

### Задачи изучения дисциплины

- ознакомление с современными методами геометрии, их приложениями для разрешимости различных математических задач, задач гидродинамики,
- выработка навыков и умений по применению полученных знаний при решении задач разных математических дисциплин.

## 10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:

Дисциплина «Современные методы геометрии и анализа» относится к обязательной части Блока 1 Дисциплины (модули).

Для его успешного освоения необходимы знания и умения, приобретенные в результате обучения по предшествующим дисциплинам: математический анализ, алгебра, аналитической геометрии.

Студент должен свободно владеть математическим анализом, элементами линейной алгебры.

Дисциплина является предшествующей для: Математический анализ; Алгебра; Аналитическая геометрия.

## 11. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины:

| Код   | Название компетенции  | Код(ы)  | Индикатор(ы)   | Планируемые результаты обучения   |
|-------|---|---------|--|---|
| ОПК-1 | Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности | ОПК-1.1 | Применяет базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук                                  | Знать: концептуальные основы методов вычисления фундаментальных групп простейших топологических пространств; основные понятия и факты теории компактных пространств<br>Уметь: пользоваться современными методами топологии и геометрии, их приложениями для разрешимости различных математических задач<br>Владеть: теоретическими подходами в теории компактных пространств; навыками работы в информационных современных системах |
|       |   | ОПК-1.2 | Оценивает и формулирует актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики  | Знать: зарубежную и отечественную литературу в области теории компактных пространств и теории фундаментальных групп пространств<br>Уметь: грамотно и правильно представлять свои результаты<br>Владеть: источниками информации, навыками работы с литературой, информационными системами  |
|       |   | ОПК-1.3 | Анализирует и применяет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний | Знать: методы решения задач в разных математических дисциплинах<br>Уметь: работать с различными источниками научной информации, грамотно и правильно представлять свои результаты<br>Владеть: Методами самостоятельного обучения новым знаниям и способами их применения в теории компактных пространств, и теории фундаментальных групп пространств  |

## 12. Объем дисциплины в зачетных единицах/часах — 2/72.

Форма промежуточной аттестации: зачёт - 3 семестр

### 13. Виды учебной работы:

| Вид учебной работы     | Трудоемкость (часы) |              |
|------------------------|---------------------|--------------|
|                        | Всего               | По семестрам |
|                        |                     | 3            |
| Аудиторные занятия     | 16                  | 16           |
| в том числе: лекции    | 16                  | 16           |
| практические           | -                   | -            |
| лабораторные           | -                   | -            |
| Самостоятельная работа | 56                  | 56           |
| Итого:                 | 72                  | 72           |

#### 13.1 Содержание разделов дисциплины:

| № п/п            | Наименование раздела дисциплины          | Содержание раздела дисциплины   | Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *  |
|------------------|--|---|---|
| <b>1. Лекции</b> |  |   |   |
| 1                | Топологические пространства.             | Топологические пространства, открытые и замкнутые множества, окрестность множества, хаусдорфовы пространства, компактные пространства, критерий компактности в терминах центрированных множеств. Свойства компактных пространств. Непрерывные отображения компактных пространств. | <a href="https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=12185">https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=12185</a> |
| 2                | Компактность в метрических пространствах | Относительная компактность, секвенциальная компактность, Теорема Кантора, критерий относительной компактности в метрическом пространстве, теорема Хаусдорфа, примеры. Теорема Тихонова.   |   |
| 3                | Относительная компактность               | Теорема Арцела, критерий конечномерности нормированного пространства, Теорема компактных вложений соболевских пространств   |   |
| 4                | Фундаментальные группы пространств       | Определение фундаментальных групп, гипотеза Пуанкаре, геометрический подход к её доказательству.  |   |

#### 13.2 Разделы дисциплины и виды занятий:

| № п/п | Наименование раздела дисциплины          | Виды занятий (часов) |              |              |                        | Всего |
|-------|--|----------------------|--------------|--------------|------------------------|-------|
|       |  | Лекции               | Практические | Лабораторные | Самостоятельная работа |       |
| 1     | Топологические пространства              | 4                    |              |              | 14                     | 18    |
| 2     | Компактность в метрических пространствах | 4                    |              |              | 14                     | 18    |
| 3     | Критерии относительной компактности      | 4                    |              |              | 14                     | 18    |
| 4     | Фундаментальные группы                   | 4                    |              |              | 14                     | 18    |
|       | Итого                                    | 16                   |              |              | 56                     | 72    |

### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

В процессе преподавания дисциплины используются такие виды учебной работы, как лекции и различные виды самостоятельной работы обучающихся. На лекциях рассказывается теоретический материал.

При изучении курса «Современные методы геометрии и анализа» обучающимся следует внимательно слушать и конспектировать материал, излагаемый на аудиторных занятиях. Для его понимания и качественного усвоения рекомендуется следующая последовательность действий.

1. После каждой лекции студентам рекомендуется подробно разобрать прочитанный теоретический материал, выучить все определения и формулировки теорем, разобрать примеры, рассмотренные на лекции. Перед следующей лекцией обязательно повторить материал предыдущей лекции.

2. Перед выполнением самостоятельной работы обязательно повторить лекционный материал, разобрать примеры, после чего приступить к выполнению заданий. Если возникнут вопросы, обязательно задать на следующем занятии или в присутственный час преподавателю.

3. Кроме обычного курса в системе «Электронный университет», все необходимые для усвоения курса материалы размещены также на сайте факультета [https://math.vsu.ru/wp/?page\\_id=937](https://math.vsu.ru/wp/?page_id=937).

## 15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины:

а) основная литература:

| № п/п | Источник   |
|-------|--|
| 1     | Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа, / Издательство «Лань», 2009, 272 с  |
| 2     | Гликликс Ю.Е. Топология и дифференциальная геометрия (Пятое издание) / Ю.Е. Гликликс. - Воронеж: ВГУ, 2010.- 100 с.  |
| 3     | Звягин В.Г., Ратинер Н.М. Топологические методы в теории нелинейных фредгольмовых отображений и их приложения / В.Г. Звягин, Н.М. Ратинер; ФГБОУ ВО Воронежский государственный университет. — М.: Наука, 2019. — 543 с. |

б) дополнительная литература:

| № п/п | Источник  |
|-------|---|
| 4     | Звягин В. Г.. Линейные фредгольмовы операторы и их свойства : учебное пособие для студентов вузов / В.Г. Звягин, В.Т. Дмитриенко, Н.М. Ратинер ; Воронеж. гос. ун-т .— Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2007.— 81 с                     |
| 5     | Ниренберг Л.. Лекции по нелинейному функциональному анализу / Л. Ниренберг ; пер. с англ. Н.Д. Введенской .— М. : Мир, 1977 .— 232 с.   |
| 6     | Звягин В. Г.. Степень ориентированных отображений конечномерных многообразий : учебно-методическое пособие для вузов / В.Г. Звягин, В.Т. Дмитриенко, Н.М. Ратинер ; Воронеж. гос. ун-т.— Воронеж : ЛОП ВГУ, 2006 .— 43 с. |
| 7     | Мищенко А.С. Курс дифференциальной геометрии и топологии / А.С.Мищенко, А.Т.Фоменко. - М.:Изд- во МГУ, 1980.-439 с.   |

в) информационно-библиотечные ресурсы

| № п/п | Источник   |
|-------|--|
| 8     | <a href="http://www.lib.vsu.ru">http://www.lib.vsu.ru</a> - электронный каталог ЗНБ ВГУ                                  |
| 9     | ЭБС «Университетская библиотека онлайн»  |
| 10    | <a href="https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=12185">https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=12185</a> - Электронный курс |
| 11    | <a href="https://math.vsu.ru/wp/?page_id=937">https://math.vsu.ru/wp/?page_id=937</a> – Сайт факультета                  |

## 16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы:

| № п/п | Источник  |
|-------|---|
| 1     | Звягин В. Г.. Линейные фредгольмовы операторы и их свойства : учебное пособие для студентов вузов / В.Г. Звягин, В.Т. Дмитриенко, Н.М. Ратинер ; Воронеж. гос. ун-т .— Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2007.— 81 с                     |
| 2     | Ниренберг Л.. Лекции по нелинейному функциональному анализу / Л. Ниренберг ; пер. с англ. Н.Д. Введенской .— М. : Мир, 1977 .— 232 с.   |
| 3     | Звягин В. Г.. Степень ориентированных отображений конечномерных многообразий : учебно-методическое пособие для вузов / В.Г. Звягин, В.Т. Дмитриенко, Н.М. Ратинер ; Воронеж. гос. ун-т.— Воронеж : ЛОП ВГУ, 2006 .— 43 с. |
| 4     | Мищенко А.С. Курс дифференциальной геометрии и топологии / А.С.Мищенко, А.Т.Фоменко. - М.:Изд- во МГУ, 1980.-439 с.   |
| 5     | Звягин В.Г. Курс лекций «Элементы современной геометрии и анализа» : учеб. пособие / В.Г. Звягин Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2010. – 49 с.   |
| 6     | Положение об организации самостоятельной работы обучающихся в Воронежском государственном университете  |

## 17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение и информационно-справочные системы (при необходимости)

Дисциплина может реализовываться с применением дистанционных образовательных

технологий, например, на платформе «Электронный университет ВГУ» (<https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=12185>).

Перечень необходимого программного обеспечения: операционная система Windows или Linux, Microsoft, Windows Office, LibreOffice 5, *Calc*, *Math*, браузер Mozilla Firefox, Opera или Internet.

### 18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Специализированная мебель.

Для самостоятельной работы используется класс с компьютерной техникой, оснащенный необходимым программным обеспечением, электронными учебными пособиями и законодательно - правовой и нормативной поисковой системой, имеющий выход в глобальную сеть.

При реализации дисциплины с использованием дистанционного образования возможны дополнения материально-технического обеспечения дисциплины.

### 19. Перечень компетенций с указанием этапов формирования и планируемых результатов обучения

| № п/п  | Наименование раздела дисциплины (модуля) | Компетенция(и) | Индикатор(ы) достижения компетенции | Оценочные средства                                       |
|--|--|----------------|-------------------------------------|--|
| 1  | Топологические пространства.             | ОПК-1          | ОПК-1.1, ОПК-1.2                    | Домашние задания, контрольная работа № 1                 |
| 2  | Компактность в метрических пространствах | ОПК-1          | ОПК-1.1, ОПК-1.2                    | Домашние задания, контрольная работа № 1                 |
| 3  | Критерии относительной компактности      | ОПК-1          | ОПК-1.2, ОПК-1.3                    | Домашние задания, контрольная работа № 1                 |
| 4  | Фундаментальные группы                   | ОПК-1          | ОПК-1.2                             | Домашние задания, контрольная работа № 1                 |
| Промежуточная аттестация<br>Форма контроля - Зачет |  |                |                                     | Зачет выставляется при успешной сдаче контрольной работы |

### 20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

#### Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

#### Домашние задания:

##### По теме 1. Топологические пространства.

Звягин В.Г. Курс лекций «Элементы современной геометрии и анализа» : учеб. пособие / В.Г. Звягин Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2010. – 49 с.

Задание: Показать следование Предложения 6.1 из Леммы 6.2

##### По теме 2. Компактность в метрических пространствах

Звягин В.Г. Курс лекций «Элементы современной геометрии и анализа» : учеб. пособие / В.Г. Звягин Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2010. – 49 с.

Задание: Задача 9.2

##### По теме 3 Критерии относительной компактности

Звягин В.Г. Курс лекций «Элементы современной геометрии и анализа» : учеб. пособие / В.Г. Звягин Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2010. – 49 с.

Задание: Доказать, что для того, чтобы подмножество  $X$  полного метрического пространства было относительно компактным, достаточно, чтобы для любого  $\varepsilon > 0$  существовала относительно компактная  $\varepsilon$ -сеть множества  $X$ .

##### По теме 4. Фундаментальные группы

Звягин В.Г. Курс лекций «Элементы современной геометрии и анализа» : учеб. пособие / В.Г. Звягин Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2010. – 49 с.

Задание: Показать, что для любого выпуклого множества  $R$  есть только один гомотопический класс петель.

## Примерный перечень задач для контрольной работы:

### Контрольно-измерительный материал № 1

1. Относительная компактность, секвенциальная компактность, Теорема Кантора, критерий относительной компактности в метрическом пространстве, теорема Хаусдорфа, примеры. Теорема Тихонова.

#### Примерный перечень вопросов

|    |  |
|----|--|
| 1  | Топологические пространства, открытые и замкнутые множества, окрестность множества.  |
| 2  | Хаусдорфовы пространства, компактные пространства, критерий компактности в терминах централизованных множеств. Свойства компактных пространств |
| 3  | Непрерывные отображения компактных пространств.  |
| 4  | Относительная компактность, секвенциальная компактность.   |
| 5  | Теорема Арцела, критерий конечномерности нормированного пространства.  |
| 6  | Теорема компактных вложений соболевских пространств.   |
| 7  | Теорема Хаусдорфа, Теорема Тихонова.   |
| 8  | Критические точки и критические значения отображений.  |
| 9  | Регулярные значения отображений.   |
| 10 | Теорема Кантора.   |
| 11 | Связь неподвижных точек и периодических решений обыкновенных уравнений.  |
| 12 | Направляющие функции.  |

Текущий контроль представляет собой проверку усвоения учебного материала теоретического характера, регулярно осуществляемую на занятиях.

Цель текущего контроля:

Определение уровня сформированности профессиональных компетенций, знаний и навыков деятельности в области знаний, излагаемых в курсе.

Задачи текущего контроля: провести оценивание

1. уровня освоения теоретических и практических понятий, научных основ профессиональной деятельности;
2. степени готовности обучающегося применять теоретические и практические знания и профессионально значимую информацию, сформированности когнитивных умений.
3. приобретенных умений, профессионально значимых для профессиональной деятельности.

Текущий контроль предназначен для проверки хода и качества формирования компетенций, стимулирования учебной работы обучаемых и совершенствования методики освоения новых знаний. Он обеспечивается проведением контрольной работы. В ходе контрольной работы обучающемуся выдается КИМ с теоретическим вопросом и предлагается ответить на данный вопрос. Ограничение по времени 90 минут.

Если текущая аттестация проводится в дистанционном формате, то обучающийся должен иметь компьютер и доступ в систему «Электронный университет». Если у обучающегося отсутствует необходимое оборудование или доступ в систему, то он обязан сообщить преподавателю об этом за 2 рабочих дня. На контрольную работу в дистанционном режиме отводится ограничение по времени 100 минут.

## 20.2. Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация предназначена для определения уровня освоения всего объема учебной дисциплины. Промежуточная аттестация по дисциплине «Современные методы геометрии и анализа» проводится в форме зачета.

При промежуточной аттестации 3 семестра уровень освоения учебной дисциплины и степень сформированности компетенции определяются оценками «зачтено» и «незачтено», которые формируются следующим образом:

Контрольная работа – по степени правильности ответа на вопрос контрольной работы.

| Шкала оценок | Критерии оценок  |
|--------------|--|
| Зачтено      | Студент показывает хорошие знания изученного учебного материала; самостоятельно, логично и последовательно излагает и интерпретирует материалы учебного курса; полностью раскрывает смысл предлагаемого вопроса; владеет основными терминами и понятиями изученного курса; показывает умение переложить теоретические знания на предполагаемый практический опыт.  |
| Не зачтено   | Наличие серьезных упущений в процессе изложения учебного материала; в случае отсутствия знаний основных понятий и определений курса или присутствии большого количества ошибок при интерпретации основных определений; если студент показывает значительные затруднения при ответе на предложенные основные и дополнительные вопросы; при условии отсутствия ответа на основной и дополнительный вопросы |

### 20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

№1. Множество  $X$  с заданной на нем топологией  $\tau$  называется ... пространством и обозначается  $(X, \tau)$  или кратко  $X$ .

- а) топологическим;
- б) метрическим;
- в) линейным.

№2 Топологическое пространство  $X$  называется ... , если любое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие.

- а) компактным;
- б) метрическим;
- в) Банаховым.

№3 Назовем некоторую систему подмножеств  $\{A_\alpha\}$  множества  $X$  центрированной, если любое конечное пересечение  $\bigcap A_i, i = 1, \dots, n$  членов этой системы ...

- а) не пусто;
- б) равно нулю.

№4 Замкнутое подмножество компактного пространства...

- а) компактно;
- б) не пусто;

№5 Непрерывный образ компактного пространства есть ... пространство.

- а) компактное;
- б) метрическое.
- в) Хаусдорфово.

№6 Множество  $X$  метрического пространства  $(M, \rho)$  называется относительно компактным, если его замыкание  $\bar{X}$  ... в  $M$ .

**компактно.**

№7 Пусть дана последовательность  $K_1 \supset \dots \supset K_n \supset \dots$  непустых компактных множеств метрического пространства  $M$ . Тогда пересечение  $K$  **не пусто**

№8 Пусть  $K$  есть подмножество банахова пространства  $E$ . Если  $K$  есть равномерный предел относительно компактных множеств, то  $K$

**относительно компактно**

№9 Является ли компактом замкнутый конечный отрезок  $[a, b]$ ?

да

№10 Является ли единичная сфера  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| = 1\}$  компактом

да

#### Критерии и шкалы оценивания заданий ФОС:

1) Задания закрытого типа (выбор одного варианта ответа, верно/неверно):

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

2) Задания открытого типа (короткий текст):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

3) Задания открытого типа (число):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

**Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).**

Программа рекомендована НМС математического факультета протокол № 0500-04 от 18.06.2020 г.